EQUATIONS OF MOTION

$$\begin{bmatrix} M & -\frac{h}{2}M \\ \frac{h}{2}K & M\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\v_1\end{bmatrix} + \eta\begin{bmatrix}-\frac{h^2}{2}K & -\frac{h}{2}M \\ \frac{h}{2}K & -\frac{h^2}{2}K\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\v_1\end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} M & \frac{h}{2}M \\ -\frac{h}{2}K & M\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_0\\v_0\end{bmatrix} + \eta\begin{bmatrix}0 & -\frac{h}{2}M\\ \frac{h}{2}K & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_0\\v_0\end{bmatrix} - \eta\frac{h^2}{2}\begin{bmatrix}F_1\\0\end{bmatrix} + \frac{h}{2}\begin{bmatrix}0\\F_0+F_1\end{bmatrix}$$

First, solve predictor (TRAP)

$$x_1 - \frac{h}{2}v_1 = x_0 + \frac{h}{2}v_0 \to x_1 = x_0 + \frac{h}{2}(v_1+v_0)$$

$$\frac{h}{2}K\left(x_0+\frac{h}{2}(v_1+v_0)\right) + Mv_1 = -\frac{h}{2}Kx_0 + Mv_0 + \frac{h}{2}(F_0+F_1)$$

$$\left(\left(\frac{h}{2}\right)^2K+M\right)v_1 = -hKx_0 - \left(\frac{h}{2}\right)^2Kv_0 + Mv_0 + \frac{h}{2}(F_0+F_1)$$

$$v_1^*,\ x_1^* \qquad x_1 = x_1^*+\Delta x_1,\quad v_1 = v_1^*+\Delta v_1$$

Then the corrector

$$\begin{bmatrix} M & -\frac{h}{2}M \\ \frac{h}{2}K & M\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta x_1\\ \Delta v_1\end{bmatrix} + \eta\begin{bmatrix}-\frac{h^2}{2}K & -\frac{h}{2}M \\ \frac{h}{2}K & -\frac{h^2}{2}K\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1^*+\Delta x_1\\ v_1^*+\Delta v_1\end{bmatrix} = \underbrace{\eta\begin{bmatrix}0 & -\frac{h}{2}M\\ \frac{h}{2}K & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_0\\v_0\end{bmatrix} - \eta\frac{h^2}{2}\begin{bmatrix}F_1\\0\end{bmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix} M & -\frac{h}{2}M \\ \frac{h}{2}K & M\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta x_1\\ \Delta v_1\end{bmatrix} + \eta\begin{bmatrix}-\frac{h^2}{2}K & -\frac{h}{2}M \\ \frac{h}{2}K & -\frac{h^2}{2}K\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta x_1\\ \Delta v_1\end{bmatrix} = -\eta\begin{bmatrix}-\frac{h^2}{2}K & -\frac{h}{2}M \\ \frac{h}{2}K & -\frac{h^2}{2}K\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1^*\\ v_1^*\end{bmatrix} + \eta$$

$$\left(\frac{h}{2}\right)^2 = -\eta\frac{h^2}{2} + \underbrace{\eta\frac{h^2}{2} + \frac{h^2}{4}}_{\frac{h^2}{2}\left(\frac{1}{2}+\eta\right)}$$

$$M\Delta x_1 - \frac{h}{2}M\Delta v_1 + \eta\left(-\frac{h^2}{2}\right)K\Delta x_1 - \eta\frac{h}{2}M\Delta v_1 = b_1$$

$$\left(M - \eta\frac{h^2}{2}K\right)\Delta x_1 - (1+\eta)\frac{h}{2}M\Delta v_1 = b_1 \qquad \left(+\left(\frac{1}{2}+\eta\right)\frac{h^2}{2}K\Delta x_1\right)$$

$$\frac{h}{2}K\Delta x_1 + M\Delta v_1 + \eta\frac{h}{2}K\Delta x_1 - \eta\frac{h^2}{2}K\Delta v_1 = b_2$$

$$(1+\eta)\frac{h}{2}K\Delta x_1 + \left(M - \eta\frac{h^2}{2}K\right)\Delta v_1 = b_2 \qquad \left(+\left(\frac{1}{2}+\eta\right)\frac{h^2}{2}K\Delta v_1\right)$$

$$\left(M + \left(\frac{h}{2}\right)^2K\right)\Delta x_1 = b_1 + (1+\eta)\frac{h}{2}M\Delta v_1 + \left(\frac{1}{2}+\eta\right)\frac{h^2}{2}K\Delta x_1$$

$$\left(M + \left(\frac{h}{2}\right)^2K\right)\Delta v_1 = b_2 - (1+\eta)\frac{h}{2}K\Delta x_1 + \left(\frac{1}{2}+\eta\right)\frac{h^2}{2}K\Delta v_1$$

$$\begin{bmatrix} (M+(\frac{h}{2})^2K) & 0 \\ 0 & (M+(\frac{h}{2})^2K) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\frac{1}{2}+\eta)\frac{h^2}{2}K & (1+\eta)\frac{h}{2}M \\ -(1+\eta)\frac{h}{2}K & (\frac{1}{2}+\eta)\frac{h^2}{2}K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta v_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M-\frac{h^2}{2}\eta K & -\frac{h}{2}(1+\eta)M \\ \frac{h}{2}(1+\eta)K & M-\frac{h^2}{2}\eta K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

How to solve this efficiently?